

Ex.25 证明: $\text{rank}(A) = 1$ 当且仅当存在非零向量 α, β 使得 $A = \alpha\beta^T$.

证明. $\text{rank}(A) = 1$ 当且仅当矩阵 A 的行向量组的秩为1 当且仅当矩阵 A 的各行是矩阵 A 的某一个非零行的倍数, 不妨设, 非零行向量 β^T 是矩阵 A 的第一行, 且矩阵 A 的第 i 行是第一行的 k_i 倍 ($i = 2, 3, \dots, m$, 这里假定矩阵 A 有 m 行), 则

$$A = \begin{pmatrix} \beta^T \\ k_2\beta^T \\ \vdots \\ k_m\beta^T \end{pmatrix} = \alpha\beta^T,$$

其中,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}.$$